خلاصه درس

فصل ۱ : تابع

درس اول: توابع چندجمله‌ای

▪ تعریف تابع چندجمله‌ای

صورت کلی این‌گونه از توابع به زبان ریاضی به شکل زیر است:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0 \qquad (a_n\neq 0)$$

کـه در آن ضریب‌های a_0، a_1، … و a_n اعـدادی حقیقی و توان‌ها اعدادی حسابی هستند.

به بیان سـاده، در توابع چندجملـه‌ای، متغیر، زیر رادیـکال یا در مخرج کسـر یا در توان قرار ندارد. بـرای نمونه توابع $g(x)=\sqrt{x}$ ، $f(x)=\frac{1}{x}$ و $h(x)=x^x$ چندجمله‌ای نیستند، امّا توابع $y=\frac{1}{3}x^2$ و $y=\sqrt{3}x^3+2x$ چندجمله‌ای محسوب می‌شوند.

▪ انواع چندجمله‌ای‌ها

به‌طورکلی، نوع یک تابع چندجمله‌ای با توجه به بزرگ‌ترین توان متغیر آن مشخص می‌گردد. بزرگ‌ترین توان متغیر در یک چندجمله‌ای را **درجهٔ** آن چندجمله‌ای می‌نامیم.

تاکنون با چندجمله‌ای‌های درجهٔ اول یا توابع خطی و درجهٔ دوم یا سهمی‌ها آشنا شده‌ایم. اکنون می‌خواهیم با چندجمله‌ای‌های درجهٔ سوم به فرم کلی $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ $(a_3\neq 0)$ به‌خصوص با تابع $y=x^3$ آشنا شویم.

▪ چندجمله‌ای‌های معروف:

① توابع خطی: $f(x)=ax+b$

الف) تابع ثابت: $y=b$

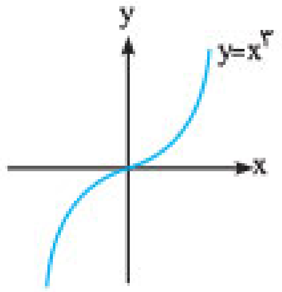
ب) تابع همانی: $y=x$

② توابع درجهٔ دوم (سهمی‌ها): $f(x)=ax^2+bx+c$

③ توابع درجهٔ سوم: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

▪ بررسی تابع $y=x^3$ و ویژگی‌های آن

نمودار این تابع به شکل مقابل است:



▪ دامنه و بُرد این تابع هر دو $\mathbb{R}$ هستند.

▪ نمودار این تابع نسـبت به مبـدأ مختصات متقارن اسـت، یعنی اگر از هـر نقطه روی این نمودار به مبدأ وصل کرده و به اندازهٔ خود امتداد دهیم، به نقطه‌ای دیگر از همان نمودار می‌رسیم.

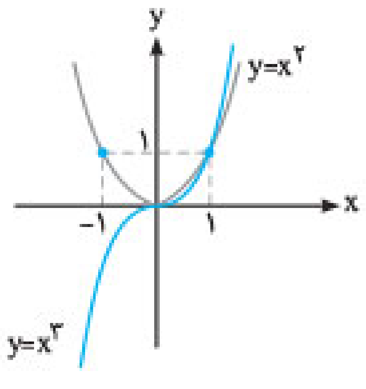
▪ این تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

مقایسهٔ نمودار دو تابع $y=x^2$ و $y=x^3$

همان‌طور که در نمودار روبه‌رو می‌بینیم: ایـن دو تابـع دارای دو نقطهٔ تقاطع هستند. زیرا داریم:

$$x^3=x^2\Rightarrow x^3-x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$



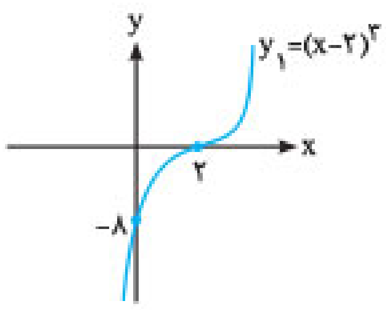
و در بازهٔ $(0,1)$ نمـودار تابع $y=x^3$ پایین نمـودار $y=x^2$ قرار می‌گیرد (چون اعداد بین صفر و یک هرچقدر دارای توان بیشـتری باشـند، مقدار کوچک‌تری ایجـاد می‌کنند). امّا در بازهٔ $(1,+\infty)$ نمودار $y=x^3$ از نمودار $y=x^2$ بالاتر اسـت. در بازهٔ $(-\infty,0)$ نیز نمـودار $y=x^3$ پایین نمودار $y=x^2$ قرار می‌گیرد.

▪ رسم توابع درجهٔ سوم پیچیده‌تر به کمک انتقال

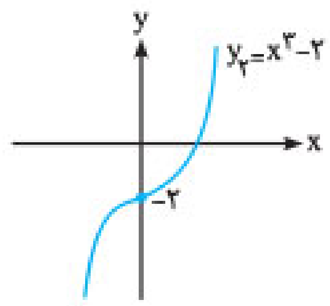
بـه کمک قوانین انتقال نمودارها می‌توانیم توابع درجهٔ سـوم پیچیده‌تر از $y=x^3$ را نیز رسم نماییم.

مثال **توابـع $y_1=(x-2)^3$ ، $y_2=x^3-2$ و $y_3=-x^3$ را به‌طـور جداگانه رسم کنید.**

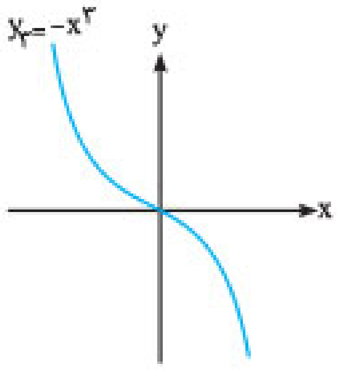
پاسخ برای رسـم نمودار تابع y_1، بایـد نمـودار $y=x^3$ را دو واحد به راست انتقال دهیم.



برای رسم نمودار تابع y_2، باید نمودار $y=x^3$ را دو واحد به سـمت پایین انتقال دهیم.



و در پایان، برای رسم نمودار تابع y_3 باید نمودار $y=x^3$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



▪ توابع صعودی و توابع نزولی

تعریف، تابع f را در بـازه‌ای مانند I صعودی گوییم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 عضو بازهٔ I داشته باشیم: $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

به‌طور مشابه، تابع f را روی بازهٔ I نزولی می‌نامیم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 در این بازه داشته باشیم: $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)\leq f(x_1)$

تابع یکنوا، اگر تابع f در بازهٔ I صعودی یا نزولی باشـد، آن‌گاه گوییم f بر این بازه یکنواست.

تابع اکیداً یکنوا، اگر تابع f در بازهٔ I، اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشـد، آن‌گاه گوییم f بر این بازه اکیداً یکنواسـت (روی نمودار توابع اکیداً یکنوا حتی دو نقطه که دارای عرض‌های یکسان باشند هم پیدا نمی‌کنیم.)

نکته هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً نزولی)، صعودی (نزولی) هم محسوب می‌شود. امّا عکس این مطلب لزوماً درست نیست. یعنی هر تابع صعودی (نزولی) را نمی‌توان اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) محسوب کرد.

درس دوم: معادلات مثلثاتی

■ نسبت‌های مثلثاتی زوایای دوبرابر کمان (2α)

اگر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را داشته باشیم، با استفاده از روابط زیر می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 2α را حساب کنیم. همچنین با داشتن نسبت‌های مثلثاتی 2α، می‌توانیم به کمک روابط زیر، نسبت‌های مثلثاتی α را به‌دست آوریم.

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

نکته ۱: دوستان دانش‌پژوه، به خاطر داشته باشید که روابط بالا فقط مخصوص فرم 2α نیست، بلکه مهم آن است که کمان نسبت‌های مثلثاتی سمت چپ روابط فوق، همواره دوبرابر کمان نسبت‌های مثلثاتی سمت راست باشد. به‌عنوان مثال، با استفاده از قالب بالا می‌توانیم بنویسیم:

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ یا $\sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha.\cos 2\alpha$

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ یا $\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$

نکته ۲: روابط فرعی مربوط به نسبت‌های مثلثاتی 2α، واضح است که از رابطهٔ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

همچنین از رابطهٔ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (چنانچه در سمت راست یک‌بار به‌جای $\sin^2\alpha$ قرار دهیم $1-\cos^2\alpha$ و بار دیگر به‌جای $\cos^2\alpha$ قرار دهیم $1-\sin^2\alpha$)، به دو رابطهٔ مفید زیر خواهیم رسید:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

نکته: فرمول‌های کاهش توان (طلایی)

اگر از رابطهٔ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ مقدار $\cos^2\alpha$ را به‌دست آوریم، خواهیم داشت:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

به‌طور مشابه، اگر در رابطهٔ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ مقدار $\sin^2\alpha$ را بیابیم:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

مثال نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $67/5^\circ$ را حساب کنید.

پاسخ می‌دانیم $90^\circ = 67/5^\circ + 22/5^\circ$، پس دو زاویهٔ $67/5^\circ$ و $22/5^\circ$ متمم یکدیگرند و داریم:

$$\begin{cases} \sin 67/5^\circ = \cos 22/5^\circ \\ \cos 67/5^\circ = \sin 22/5^\circ \end{cases}$$

از طرفی با توجه به فرمول‌های کاهش توان می‌توان نوشت:

$$\sin^2 22/5^\circ = \frac{1-\cos(2\times 22/5^\circ)}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 67/5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

به‌طور مشابه، داریم:

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \sin 67/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

همچنین می‌دانیم:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \tan 67/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tan 67/5^\circ = \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 67/5^\circ = 1+\sqrt{2}$$

■ معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، معادلهٔ مثلثاتی نام دارد. برای نمونه: معادله‌های $2\sin x - 1 = 0$ یا $\cos 2x - \sin x = 0$ جزو معادلات مثلثاتی هستند.

■ جواب‌های کلی معادلهٔ سینوسی

اگر با استفاده از عملیات جبری و مثلثاتی، به معادلهٔ سادهٔ $\sin x = \sin\alpha$ برسیم، تمام جواب‌های این معادله از روابط کلی زیر به‌دست خواهد آمد:

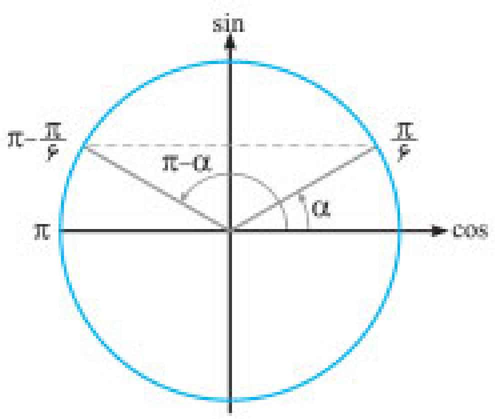
$$\boxed{\begin{matrix} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{matrix} \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

بیایید با ذکر یک مثال، چگونگی به‌دست آمدن روابط بالا را شهود کنیم.

مثال **تمام جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $2\sin x - 1 = 0$ را بیابید.**

پاسخ

$$2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$



درست است که زاویهٔ اصلی که سینوس‌اش $\frac{1}{2}$ می‌شود را پیدا کرده‌ایم، امّا هدف ما از حل معادله، یافتن تمام جواب‌های ممکن برای معادله است، پس کار ما هنوز تمام نشده است! همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینیم، اگر انتهای کمان زاویهٔ موردنظر ما، در نقطهٔ $\pi - \frac{\pi}{6}$ نیز باشد، باز هم سینوس‌اش، $\frac{1}{2}$ خواهد بود. در واقع همواره دو جا، سینوس مقداری بین ۱ و ۱− دارد: یکی خود α و دیگری $\pi - \alpha$. برای همین است که در روابط کلی بالا، هم α داریم و هم $\pi - \alpha$.

از طرفی می‌دانیم مثلاً مقدار $\sin 390^\circ$ نیز برابر $\frac{1}{2}$ است، زیرا:

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

پس علت این‌که در روابط بالا مضرب زوج π $(2k\pi)$ را اضافه کرده‌ایم، پوشش‌دادن به جواب‌هایی از معادله است که حاصل چرخیدن‌های کامل حول دایره هستند.

با توضیحات فوق، جواب‌های این معادله عبارت‌اند از:

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad , \quad x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

مثال معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(۰,۳)$ و $B(-۴,-۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

پاسخ

$$\begin{cases} x_\circ = \frac{x_A+x_B}{۲} \\ y_\circ = \frac{y_A+y_B}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_\circ = \frac{-۴+۰}{۲} = -۲ \\ y_\circ = \frac{-۱+۳}{۲} = ۱ \end{cases} \Rightarrow O(-۲,۱)$$

$$۲R = AB = \sqrt{(-۴-۰)^۲+(-۱-۳)^۲} = \sqrt{۱۶+۱۶} = ۴\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow R = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow (x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۱)^۲ = ۸$$ «معادلهٔ دایرهٔ مطلوب»

(۳) نوشتن معادلهٔ دایره‌ای که مختصات مرکزش معلوم است و بر خط معینی مماس می‌باشد.

ابتدا اندازهٔ شعاع دایره را با استفاده از رابطهٔ «فاصلهٔ نقطه از خط» می‌یابیم. سپس با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم.

مثال معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $(۰,۳)$ بوده و بر خط $d: ۳x-۴y=۳$ مماس باشد.

پاسخ

$$D = \frac{|ax_\circ+by_\circ+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} \xrightarrow[y_\circ=۳]{x_\circ=۰} D = \frac{|۳(۰)-۴(۳)-۳|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{۱۵}{۵} = ۳ \Rightarrow R = ۳$$ «شعاع دایرهٔ مطلوب»

$$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۰)^۲+(y-۳)^۲ = ۹$$

$$\Rightarrow x^۲+(y-۳)^۲ = ۹$$ «معادلهٔ دایرهٔ مطلوب»

(۴) نوشتن معادلهٔ دایره‌ای که مختصات مرکزش معلوم است و با دایرهٔ دیگری مماس برون و یا درون است.

ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع دایرهٔ دوم را می‌یابیم. سپس طول خط‌المرکزین دو دایره را پیدا می‌کنیم و از رابطهٔ $|R-R'| = OO'$ یا $R+R' = OO'$، شعاع دایرهٔ اولی را پیدا می‌کنیم. با داشتن شعاع و مختصات مرکز، معادلهٔ دایرهٔ اول را می‌نویسیم.

مثال معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-۱,-۱)$ بوده و با دایرهٔ $C': x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس درون باشد.

پاسخ

$$O'(۲,۳), R' = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲+(-۶)^۲-۴(-۳)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۳۶+۱۲}$$

$$\Rightarrow R' = ۴$$

$$OO' = \sqrt{(-۱-۲)^۲+(-۱-۳)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} \Rightarrow OO' = ۵$$ «طول خط‌المرکزین»

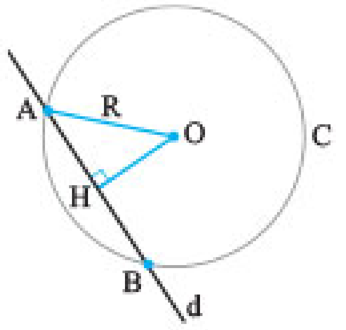
از طرفی: $|R-R'| = OO' \Rightarrow |R-۴| = ۵$

$$\Rightarrow R-۴ = \pm۵ \Rightarrow \begin{cases} R=۹ ✓ \\ R=-۱ ✗ \end{cases} \Rightarrow (x+۱)^۲+(y+۱)^۲ = ۸۱$$ «معادلهٔ دایرهٔ مطلوب»

(۵) نوشتن معادلهٔ دایره‌ای که مختصات مرکزش معلوم است و بر خط معینی، وتری با طول معلوم جدا می‌کند.

ابتدا فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده‌شده را می‌یابیم. سپس از آن‌جا که شعاع عمود بر وتر، آن را نصف می‌کند، با معلوم‌بودن طول وتر و فاصلهٔ مرکز از خط، طول شعاع دایره را با رابطهٔ فیثاغورس پیدا می‌کنیم.

مثال در شکل روبه‌رو نقطهٔ $O(۲,-۳)$ مرکز دایره است. این دایره روی خط d به معادلهٔ $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا کرده است. معادلهٔ دایره را بنویسید.



پاسخ

$$OH = \frac{|۳x_\circ-۴y_\circ+۲|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{|۳(۲)-۴(-۳)+۲|}{\sqrt{۹+۱۶}} \Rightarrow OH = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

از طرفی: $AB = ۶ \Rightarrow AH = ۶\div۲ = ۳$

در مثلث AOH رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$OA^۲ = OH^۲+AH^۲ \Rightarrow R^۲ = ۴^۲+۳^۲ \Rightarrow R^۲ = ۲۵ \Rightarrow R = ۵$$ «شعاع دایرهٔ مطلوب»

$$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۳)^۲ = ۲۵$$ «معادلهٔ دایرهٔ مطلوب»

نکته **نوشتن معادلهٔ خط مماس بر دایره در نقطه‌ای واقع بر دایره.**
ابتدا مختصات مرکز دایره را می‌یابیم، سپس شیب خطی که مرکز دایره را به نقطهٔ تماس وصل می‌کند، پیدا می‌کنیم. آن‌گاه از آن‌جا که خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع تماس عمود است، شیب شعاع تماس را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب مماس پیدا شود. با داشتن شیب مماس و معلوم بودن مختصات نقطه‌ای از آن، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

مثال خط d در نقطهٔ $A(۴,۳)$ بر دایرهٔ C به مرکز مبدأ مختصات مماس است. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

پاسخ

شیب $OA = \frac{۴}{۳} \Rightarrow$ شیب خط مماس $= \frac{-۳}{۴}$

$$\Rightarrow y-y_\circ = m(x-x_\circ) \Rightarrow (y-۴) = -\frac{۳}{۴}(x-۳)$$

$$\xrightarrow{\times۴} ۴y-۱۶ = -۳x+۹ \Rightarrow ۴y+۳x = ۲۵$$ «معادلهٔ خط مماس»

فصل ۷: احتمال

قانون احتمال کل

یادآوری در سال‌های قبل دیدیم که پدیده ها در عالم بر دو نوع‌اند:

(۱) **پدیده‌های قطعی،** پدیده‌هایی هستند که نتیجهٔ آن‌ها از قبل به‌طور یقین قابل پیش‌بینی است. مانند آن‌که در پدیدهٔ رعد و برق، صدای رعد دیرتر از نور آن به ما خواهد رسید.

(۲) **پدیده‌های تصادفی،** پدیده‌هایی هستند که نتیجهٔ آن‌ها از قبل به‌طور یقین قابل پیش‌بینی نیست. مانند آن‌که در پرتاب تاس همگن، این‌که چه عددی رو می‌شود به طور قطعی قابل پیش‌بینی نیست.

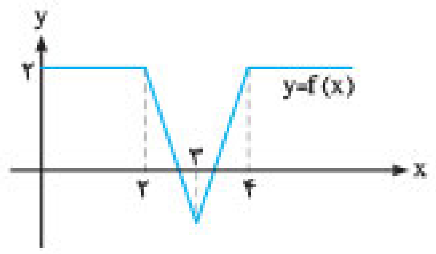
فضای نمونه‌ای، مجموعهٔ نتایج قابل پیش‌بینی از وقوع یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و با S نمایش می‌دهیم. برای نمونه در آزمایش پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای به‌صورت مقابل است: $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

برآمد، به هریک از اعضای فضای نمونه‌ای یک برآمد گوییم. برای نمونه در پرتاب تاس، ۶ برآمد وجود دارد.

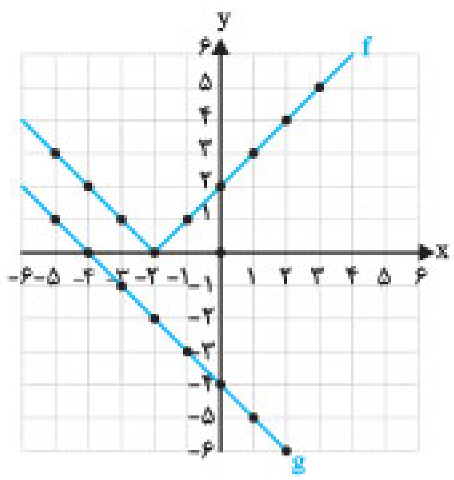
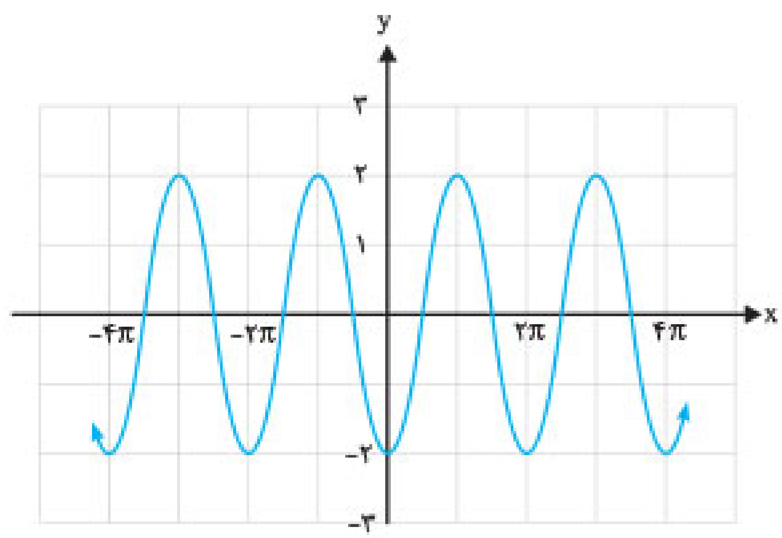
مهروماه

سؤالات شبیه‌ساز امتحانی نوبت اول

درس: ریاضی (۳) (دوازدهم)	رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	تاریخ:

ردیف	سؤالات	نمره
	فصل اول	
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.** الف) اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور x ها به‌دست می‌آید. ب) تابع $y=\frac{۱}{x}$ در دامنهٔ خود یکنوا است.	۰/۵
۲	نقطهٔ $(۴,-۲)$ واقع بر نمودار $f(x)$ در نمودار تابع $g(x)=f(۲x)+۱$ متناظر با نقطهٔ .... است.	۰/۲۵
۳	با توجه به نمودار تابع f که در روبه‌رو رسم شده است، معین کنید: پرتکرار الف) f در چه بازه‌ای صعودی اکید و در کدام بازه نزولی اکید است؟ ب) f در کدام بازه صعودی و در کدام بازه نزولی است، امّا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نیست؟  	۱
۴	به کمک نمودار $y=\sin x$ و قوانین انتقال نمودارها، نمودار تابع $y=-۲\sin(\frac{۱}{۳}x)$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم کنید. پرتکرار	۱/۲۵
۵	تابع $f=\{(۳,۲),(۱,۰),(-۱,۰),(-۲,-۱)\}$ صعودی است یا نزولی؟ چرا؟	۰/۵
۶	تابع $y=x^۳+ax^۲-bx+c$ انتقال‌یافتهٔ تابع $f(x)=x^۳$ به اندازهٔ دو واحد در امتداد محور طول‌ها به سمت چپ و سه واحد در امتداد محور عرض‌ها به سمت پایین است، مقادیر a ، b و c را بیابید.	۱/۲۵
۷	ابتدا ضابطهٔ تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۲x$ را با شرط $D_f=(-\infty,۱)$ بیابید. سپس نمودار $(f^{-۱}of)(x)$ را رسم کنید.	۱/۲۵
۸	اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x^۲-۱}$ و $g=\{(۱,-۳),(۰,۱),(-۲,۰)\}$ باشند، آن‌گاه تابع $fog^{-۱}$ را مشخص کنید.	۱/۲۵
	فصل دوم	
۹	ضابطهٔ تابعی به شکل $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که ماکزیمم آن ۴، مینیمم آن ۲− و دورهٔ تناوبش ۲ باشد. پرتکرار	۱
۱۰	معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x+۳\cos x=-۱$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. پرتکرار	۱/۲۵
۱۱	مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع آن ۲ و ۶ واحد باشد، آن‌گاه چند مثلث با این مشخصات می‌توان رسم کرد؟ پرتکرار	۱
۱۲	**درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید.** نقاطی به فرم $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\,;k\in\mathbb{Z}$ در دامنهٔ تانژانت قرار ندارند. پرتکرار	۰/۲۵
۱۳	**جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.** الف) اگر $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$ باشد، آن‌گاه $\tan\alpha$ .... $\sin\alpha$ است. ب) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=۳\cos(۳x)+۵$ برابر با .... است.	۰/۲۵ ۰/۵
۱۴	**گزینهٔ درست را انتخاب کنید.** الف) کمترین مقدار تابع $y=۱-\sin x\cos x$ کدام است؟ ۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۱−	۰/۵

درس: ریاضی (۳) (دوازدهم)	رشته: علوم تجربی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان: دی ۱۴۰۰

ردیف	سؤالات	نمره
۱	**درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.** الف) تابع $y=\sqrt{2}x^3-\frac{3}{4}x$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۳ است. ب) اگر $f(7)=5$ و $g(4)=7$، آن‌گاه $(fog)(4)=5$. پ) دو تابع $f(x)=-\frac{7}{2}x-3$ و $g(x)=-\frac{2x+7}{6}$ وارون یکدیگرند.	۰/۷۵
۲	**در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.** الف) نمودار تابع $f(x)=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$، .... از نمودار تابع $g(x)=x^2$ قرار دارد. (بالاتر ـ پایین‌تر) ب) چندجمله‌ای $p(x)=2x^3+x^2+1$ بر دو جمله‌ای .... بخش‌پذیر است. ($(x-1)$ ـ $(x+1)$)	۰/۵
۳	الف) با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر زیر را درصورت وجود به‌دست آورید. ۱) $(gof)(-1)$ ۲) $(g^{-1}of^{-1})(2)$ ب) نمودار تابع $f(x-2)-3$ را رسم کنید. 	۲
۴	نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x)=a\cos(bx)+c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص کنید. 	۱/۵
۵	معادلهٔ مثلثاتی $\cos 2x-\sin x+1=1$ را حل کنید.	۱/۵
۶	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2-x}{4x^2-1}$ ب) $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}$	۱/۷۵

پاسخنامهٔ تشریحی

امتحان ۱ ـ نوبت اول

۱ الف) نادرست (اگر $k>1$ باشد، منحنی در راستای افقی منقبض می‌شود.) (فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

ب) نادرست (تابع $y=\frac{1}{x}$ در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ به‌طور جداگانه اکیداً نزولی است، ولی در دامنه‌اش غیریکنواست.) (فصل ۱ / یکنوایی) (۰/۲۵)

۲ $(-1,2)$ (فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

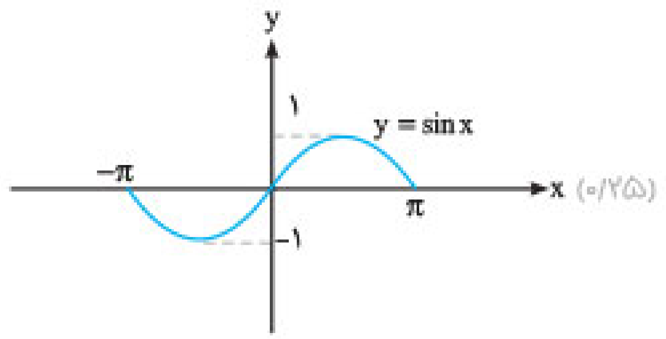
۳ الف) f در بازهٔ $(2,3)$ نزولی اکید و در بازهٔ $(3,4)$ صعودی اکید است. (۰/۵)

ب) f در بازهٔ $(0,3)$ نزولی است امّا اکیداً نزولی نیست، همچنین f در بازهٔ $(3,+\infty)$ صعودی است امّا اکیداً صعودی نیست. (۰/۵) (فصل ۱ / یکنوایی)

۴

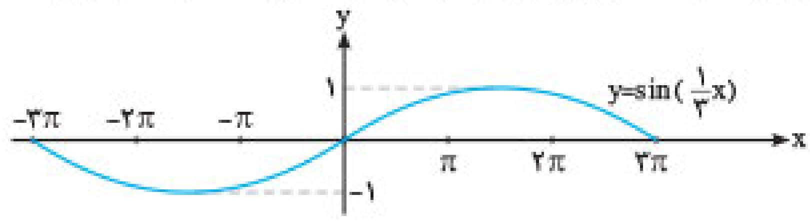
$$y=-2\sin(\frac{1}{3}x)$$

ابتدا نمودار $y=\sin x$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم می‌کنیم:

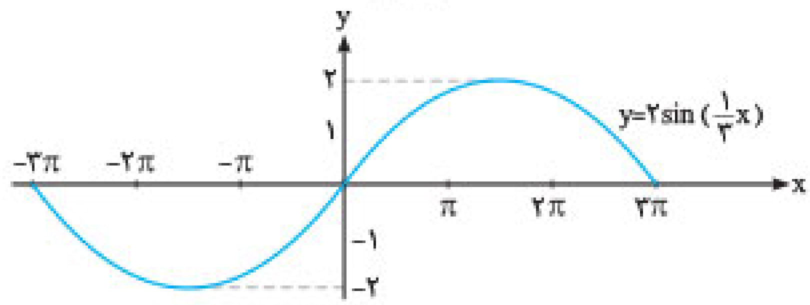


(۰/۲۵)

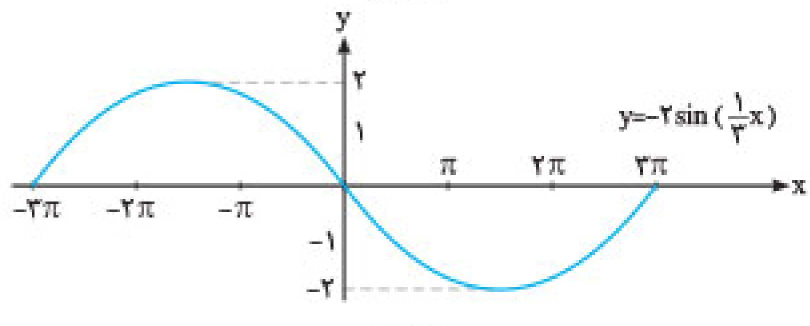
سپس آن را در راستای افقی با ضریب ۳ منبسط می‌کنیم، بعد در راستای عمودی با ضریب ۲ منبسط می‌کنیم و در آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم:



(۰/۲۵)

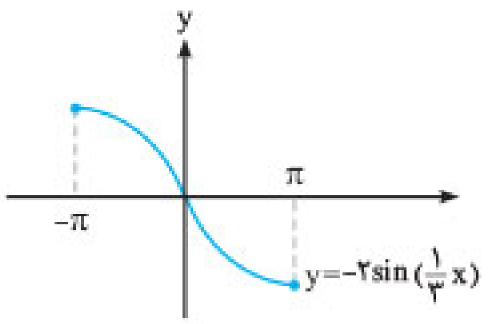


(۰/۲۵)



(۰/۲۵)

در آخر قسمت واقع در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ را از نمودار می‌بُریم:



(۰/۲۵)

(فصل ۱ / تبدیل توابع)

۵ ابتدا x ها را مرتب می‌نویسیم:

x ها $\Rightarrow -2,-1,1,3$ (۰/۲۵)

سپس عرض هرکدام را زیرش قرار می‌دهیم:

y ها $\Rightarrow -1,0,0,2$

همان‌طور که می‌بینیم تابع صعودی است (۰/۲۵)

(فصل ۱ / یکنوایی)

۶

$$f(x)=x^3 \xrightarrow[\text{به سمت چپ}]{\text{۲ واحد انتقال افقی}} y=(x+2)^3 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{۳ واحد انتقال عمودی}} y=(x+2)^3-3 \Rightarrow y=x^3+6x^2+12x+5 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه}} a=6\ (0/25)\ ,\ b=-12\ (0/25)\ ,\ c=5\ (0/25)$$

(فصل ۱ / تبدیل توابع)

۷

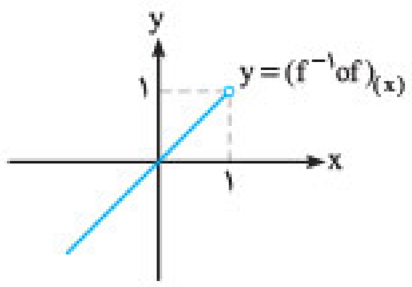
$$y=(x^2-2x+1)-1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow y=(x-1)^2-1 \Rightarrow y+1=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1}=|x-1| \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{x<1} \sqrt{y+1}=-x+1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow x=1-\sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=1-\sqrt{x+1} \quad (0/25)$$

می‌دانیم: $(f^{-1}of)(x)=x; x\in D_f$



(۰/۵)

(فصل ۱ / تابع وارون)

۸

$$g^{-1}=\{(-3,1),(1,0),(0,-2)\} \quad (0/25)$$

$$x=-3 \Rightarrow g^{-1}(-3)=1$$

$$\Rightarrow f(g^{-1}(-3))=f(1)=\frac{1+2}{(1)^2-1}=\frac{3}{0}= \text{تعریف‌نشده} \quad (0/25)$$

$$x=1 \Rightarrow g^{-1}(1)=0 \Rightarrow f(g^{-1}(1))=f(0)=-2 \Rightarrow (1,-2) \quad (0/25)$$

$$x=0 \Rightarrow g^{-1}(0)=-2 \Rightarrow f(g^{-1}(0))=f(-2)=0 \Rightarrow (0,0) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow fog^{-1}=\{(1,-2),(0,0)\}$$

(فصل ۱ / ترکیب توابع)

۱۲ الف)

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases} \ (۰/۵)$$

x		−۱		۲	
f′	−	۰	+	۰	−
f	↘	−۱۶ min	↗	۱۱ max	↘

(۰/۷۵)

ب) $f(۰) = -۹$ min (۰/۲۵)

$f(۲) = ۱۱$ max (۰/۲۵)

$f(۳) = ۰$ (۰/۲۵)

(فصل ۵ / اکسترمم‌های تابع)

۱۳

$$xy = ۳۲ \ (۰/۲۵) \Rightarrow \overbrace{f(x) = (y+۲)(x+۴) = \frac{۱۲۸}{x} + ۴۰ + ۲x}^{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \overbrace{f'(x) = -\frac{۱۲۸}{x^۲} + ۲ = ۰}^{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow x = ۸ \ (۰/۲۵), y = ۴ \ (۰/۲۵)$$

ابعاد صفحه ۶×۱۲ است. (۰/۲۵)

(فصل ۵ / بهینه‌سازی)

۱۴ الف) $FF' = |۳ - (-۵)| = ۸ = ۲c$ (۰/۲۵) $\Rightarrow c = ۴$ (۰/۲۵)

$$O \left| \begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right.$$ مرکز (۰/۵)

و معادلهٔ قطر بزرگ: $x = ۱$ (۰/۲۵)

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = \sqrt{۲۰}$

$\Rightarrow BB' = ۲\sqrt{۲۰}$ (۰/۲۵) $, e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$ (۰/۵)

(فصل ۶ / بیضی)

۱۵

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) \ (۰/۵)$$

$$P(A) = \underbrace{\frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰}}_{(۰/۵)} + \underbrace{\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰}}_{(۰/۵)} = \frac{۱۱}{۲۰۰} \ (۰/۵)$$

(فصل ۷ / احتمال کل)

۱۶

الف) $D_{gof} = \overbrace{\{x \in D_f | f(x) \in D_g\}}^{(۰/۲۵)} = \overbrace{\{x \in (-\infty, ۲] | \sqrt{۴ - ۲x} \in \mathbb{R}\}}^{(۰/۵)}$

$= (-\infty, ۲]$ (۰/۵)

ب) $(gof)(۲) - \frac{f}{g}(۰) = -۱ - (-۲) = ۱$ (۰/۷۵)

(فصل ۱ / ترکیب توابع)

۱۷ $f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx$ (۰/۵)

$f'(۲) = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۱۲ + ۴b = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = -۳$ (۰/۲۵)

$f(۲) = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۸ + ۴b + d = ۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow d = ۵$ (۰/۲۵)

(فصل ۵ / اکسترمم‌های تابع)

امتحان ۸ - شهریور ماه ۱۳۹۹ (نوبت دوم)

۱ الف) درست (فصل ۱ / تبدیل توابع) (۰/۲۵)

ب) نادرست: برابر $\mathbb{R}$ است. (فصل ۲ / تابع تانژانت) (۰/۲۵)

پ) درست (فصل ۵ / اکسترمم‌های تابع) (۰/۲۵)

۲ الف) یکنوا (فصل ۱ / یکنوایی) (۰/۲۵)

ب) پیوسته (فصل ۴ / مشتق‌پذیری) (۰/۲۵)

۳ الف)

$$D_f = [۱, +\infty), D_g = \mathbb{R} \ (۰/۵) \Rightarrow D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} \ (۰/۲۵)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} | ۲x^۲ - ۱ \in [۱, +\infty)\} \ (۰/۲۵)$$

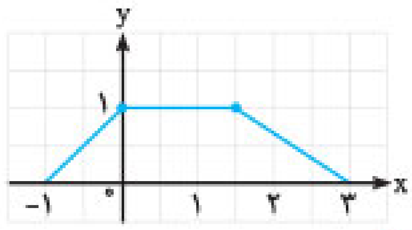
$$\Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty) \ (۰/۵)$$

ب)

$$f(g(x)) = \sqrt{۲x^۲ - ۲} \ (۰/۵)$$

(فصل ۱ / ترکیب توابع)

۴



(۰/۷۵)

(فصل ۱ / تبدیل نمودار توابع)

۵

$$\begin{array}{l} \max = |a| + c = \pi + ۱ \ (۰/۲۵) \\ \min = -|a| + c = -\pi + ۱ \ (۰/۲۵) \end{array}, \ T = \frac{۲\pi}{|-۱|} = ۲\pi \ (۰/۵)$$

(فصل ۲ / دورهٔ تناوب)

۶

$$۱ - \sin^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴} \ (۰/۲۵) \Rightarrow \sin^۲ x + \sin x - \frac{۳}{۴} = ۰ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \ (۰/۲۵) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \end{cases} \ (۰/۵)$$

$\sin x = -\frac{۳}{۲}$ غ ق ق (۰/۲۵)

(فصل ۲ / معادلات مثلثاتی)

۷

الف) $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{(۲-\sqrt{x+۱})(۲+\sqrt{x+۱})}$ (۰/۵)

$= \lim\limits_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(x-۳)} = -۲۴$ (۰/۵)

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$ (۰/۵)

پ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲x^۳}{۶x^۳} = \frac{۱}{۳}$ (۰/۵)

(فصل ۳ / حد در بی‌نهایت و حد بی‌نهایت)

۸ $A(۴, ۲۵)$ (۰/۲۵)

$\frac{۳}{۲} = \frac{y_B - ۲۵}{۵ - ۴}$ (۰/۵) $B(۵, ۲۶/۵)$ (۰/۲۵)

(فصل ۴ / شیب خط قاطع و مماس)

۹ الف) تابع f در صفر پیوسته نیست. بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست (۰/۵)

ب)

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & x > ۰ \\ ۲ & x < ۰ \end{cases} \ (۰/۵)$$